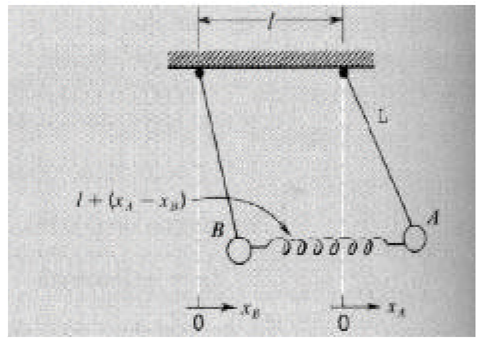
Tentamen Golven en Optica
(18/11/99, 14.00-17.00, zalen 13.201, 13.202 en 14.4)

Begin <u>iedere opgave</u> op een <u>apart vel papier.</u> Zet op <u>alle</u> vellen je naam, en vermeld op het eerste vel bovendien je studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, en het aantal ingeleverde bladen.

Puntenverdeling: 1=30[8+7+7+8], 2=30[6+6+6+6+6], 3=30[7+7+7+9]

Vraagstuk 1



Twee (stijve) massaloze slingers A en B met lengte L zijn op een afstand l van elkaar opgehangen. Aan slinger A hangt een massa m_A, en aan B een massa m_B. De massa's zijn onderling verbonden door een (massaloze) veer met lengte l en veerconstante k. De horizontale uitwijking van slinger A ten opzichte van de evenwichtsstand noemen wij x_A, en die van B x_B (zie figuur).

a. Als de verbindende veer er niet zou zijn, dan zouden de slingers vrij kunnen bewegen. Geef in dat geval een formule voor de (hoek)frequentie van deze beweging, en noem deze w_0 (deze formule hoeft niet afgeleid te worden!). Noem verder $k/m_A = w_1^2$ en $k/m_B = w_2^2$. Leid vervolgens af dat de bewegingsvergelijkingen van het gekoppelde systeem gegeven worden door

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} = -(w_0^2 + w_1^2)x_A + w_1^2 x_B$$

$$\frac{d^2x_B}{dt^2} = w_2^2 x_A - (w_0^2 + w_2^2)x_B$$

De beweging van dit systeem kan worden gezien als een lineaire combinatie van de *eigenbewegingen* van het systeem. In dit geval zijn er twee eigenbewegingen.

b. Laat zien dat $y_1 = x_A + (w_1^2/w_2^2)x_B$ een oplossing is van de algemene bewegingsvergelijking van een harmonische oscillator, en berekende de bijbehorende (hoek)frequentie w_3. Laat verder zien dat ook $y_2 = x_A - x_B$ aan deze algemene vergelijking voldoet, en bereken de bijbehorende (hoek)frequentie w_4.

c. We maken nu een keuze voor de fase van de harmonische beweging van y_1 en y_2 op het tijdstip $t = 0$, en schrijven

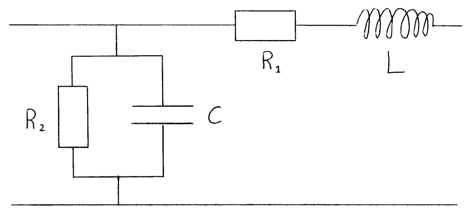
$$y_1 = C_1 \cos(w_3 t)$$

$$y_2 = C_2 \cos(w_4 t)$$

Leid voor dit geval een uitdrukking voor x_A en x_B af. Geef verder uitdrukkingen voor x_A en x_B in de limiet dat $m_B >> m_A$, en geef een fysische verklaring voor het resultaat.

d. Schrijf de oplossing voor $x_B(t)$ op voor het geval dat $m_A = m_B$, en $C_1 = C_2 = 2$. (Als je het antwoord bij onderdeel **c** niet hebt gevonden, mag je $C_1 = 1$ en $C_2 = -1$ nemen, en de functie $y(t) = y_1 + y_2$ bekijken). De massa is precies zo gekozen dat $w_4 = 2w_3$. Als men de Fourier getransformeerde van deze functie [$x_B(t)$ dan wel $y(t)$] zou nemen, bij welke (hoek)frequentie(s) zou je dan pieken in het spectrum verwachten? Geef de coëfficienten van de Fourierreeks van deze functie.

Vraagstuk 2



a. Beschouw een half-oneindige coax-kabel met verlies, met gedistribueerde impedanties zoals aangegeven in de figuur. Laat zien dat de impedantie (per lengte-eenheid) $Z_1(\omega)$ in de lengterichting gelijk is aan $R_1 + i\omega L$ en dat de impedantie $Z_2(\omega)$ in de dwarsrichting gelijk is aan $(R_2^{-1} + i\omega C)^{-1}$.

Gegeven is nu dat voor de impedanties de volgende relatie geldt: $R_1 = L/(R_2 C)$.

b. Bereken de karakteristieke impedantie $Z_0(\omega) = \sqrt{Z_1(\omega) Z_2(\omega)}$ en laat zien dat Z_0 zuiver reëel is. Wat is de interpretatie hiervan?

c. Laat zien dat de propagatieconstante $\gamma = \sqrt{Z_1(\omega)/Z_2(\omega)}$ gelijk is aan $\sqrt{R_1/R_2} + i\omega\sqrt{LC}$. Wat is de fysische interpretatie van het reële respectievelijk het imaginaire deel van γ ?

d. Laat zien dat de coax-kabel dispersievrij is. Geef een uitdrukking voor de voortplantingsnelheid van signalen door de kabel in termen van *L* en *C*.

e. Gegeven $R_1 = 10^{-4}\ \Omega\text{m}^{-1}$ en $R_2 = 100\ \Omega\text{m}$. Op welke afstand van het begin van de kabel is de amplitude van een ingangssignaal gehalveerd? Wat is er met de andere helft van het signaal gebeurd?

Vraagstuk 3

a. De Fresnel-Kirchhoff integraalformule voor diffractie aan een apertuur *A* luidt:

$$U_p(t) = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}\,')]\, dA$$

Geef onder andere aan de hand van een tekening de fysische betekenis aan van $U_p(t)$, *k*, $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ en $\vec{n}$.

b. Onder welke aannamen is het mogelijk de bovenstaande formule te vereenvoudingen tot

$$U_p = C \iint e^{ikr}\, dA ,$$

met *C* een constante?

c. Een glasplaat met een dikte *D* bestaat uit glas met een complexe brekingsindex $N = n + ik$. Loodrecht op deze plaat valt een vlakke golf, waarvan de electrische veldvector op het grensvlak (waar de vlakke golf invalt) gegeven wordt door $\vec{E}_0(t)$. Geef de electrische veldvector op het grensvlak waar de vlakke golf uittreedt. Verwaarloos hierbij de verliezen ten gevolge van reflecties aan de twee grensvlakken.

d. Een ondoorzichtig scherm bevat een spleet met breedte *b*. Loodrecht hierop valt een vlakke golf. Midden in de spleet staat een strook met breedte *b*/2 gemaakt van het glas van onderdeel **c** (dus voor $-b/2<y<-b/4$ en $b/4<y<b/2$ is de spleet open, en voor $-b/4 \le y \le b/4$ gevuld met de strook glas). Neem aan dat de glasstrook amplitude en fase van de golffunctie verandert met een factor α respectievelijk een faseverschuiving δ radialen (t.o.v. de golf in het open deel van de spleet). Stel de apertuurfunctie op voor de spleet inclusief glasstrook, en bereken de intensiteit van het Fraunhofer diffractiepatroon.